Algoritmos em Grafos

Adaptado de Humberto C. B. Oliveira

História dos Grafos

Leonhard Euler

- Em 1735, Euler ganha fama mundial ao resolver um problema que por décadas foi desafio para os matemáticos da época (Série infinita da soma dos inversos dos quadrados – conhecido como problema da Basiléia);

- A maioria dos grandes matemáticos de seu tempo tentaram sem êxito encontrar o resultado desta série infinita;

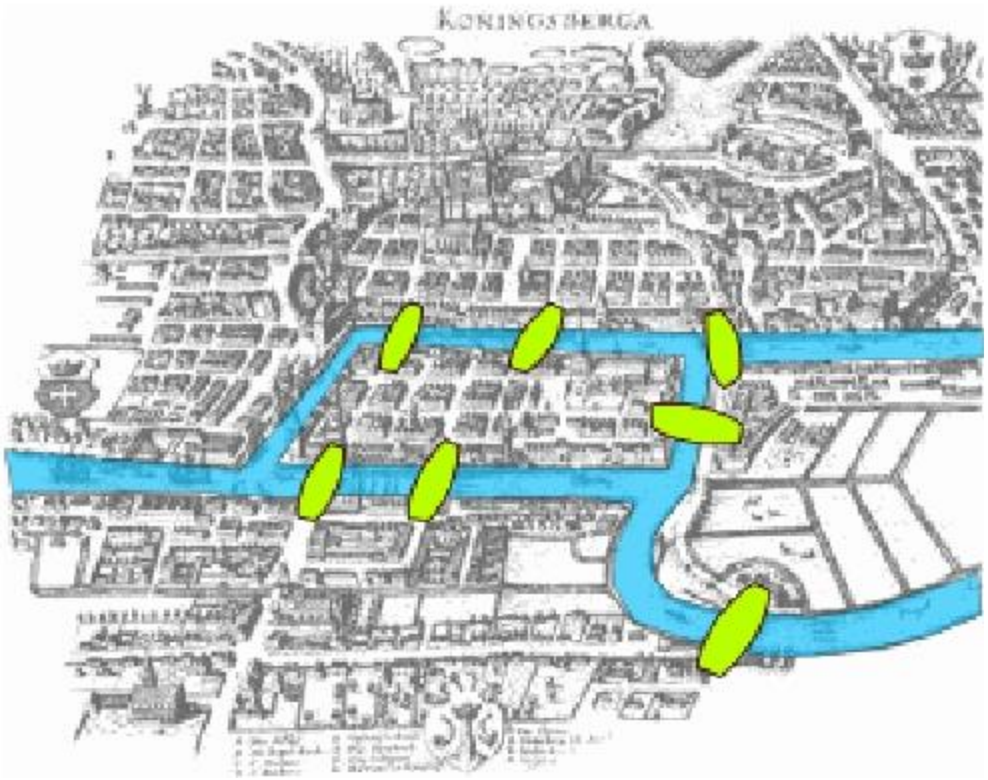
- Euler possuía apenas 28 anos na época;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler

- Um ano mais tarde (1736), Euler resolve o problema conhecido como as Sete pontes de Königsberg.

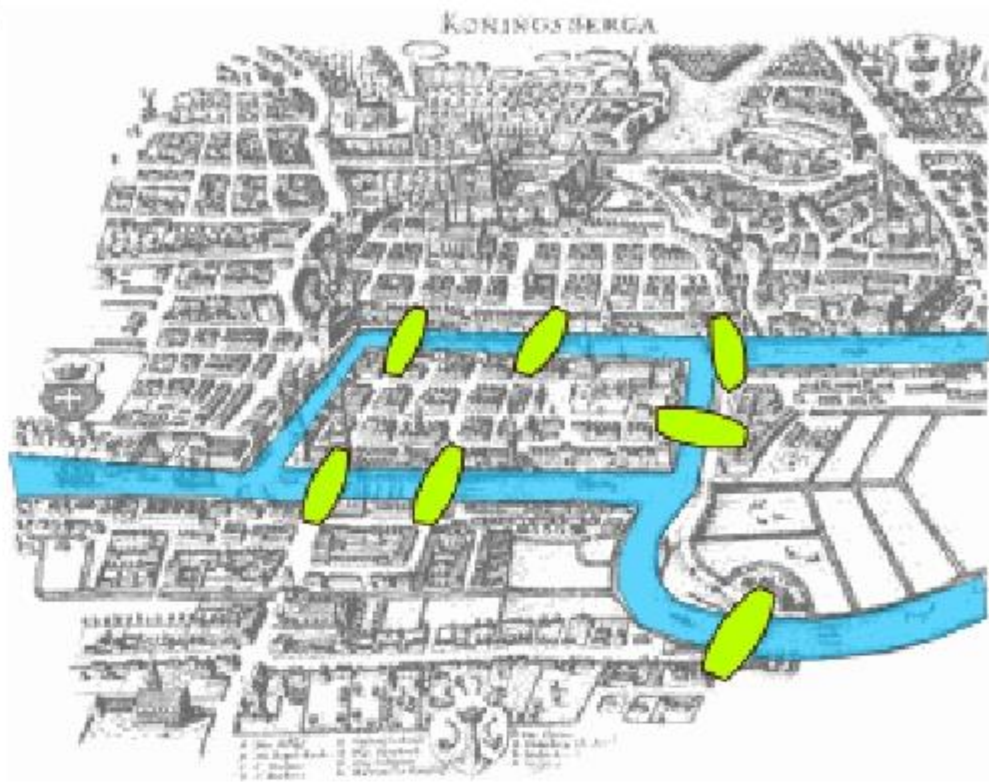
- Problema:
  - É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?



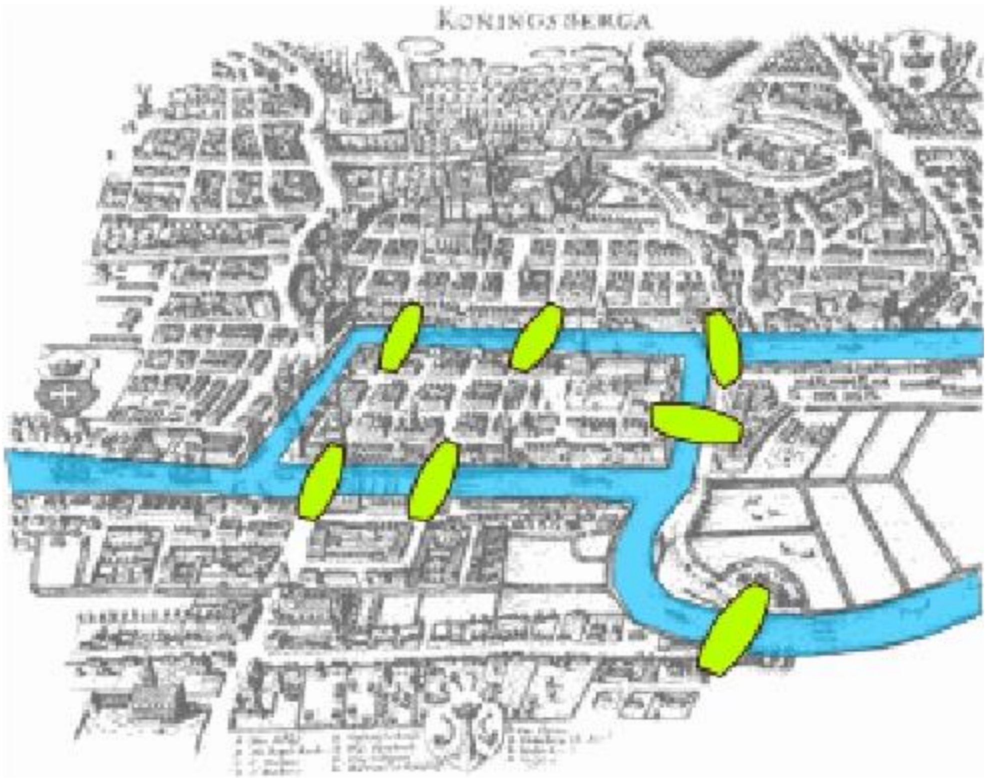
As Sete Pontes de Königsberg

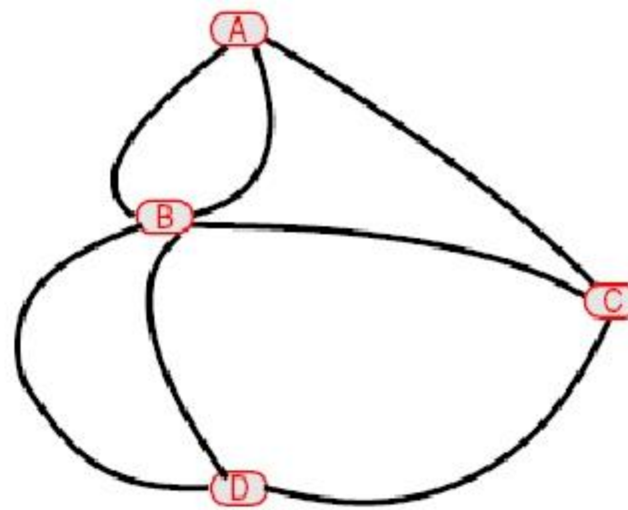
- Euler resolve este problema simplificando a forma de se enxergar o mapa:

- Cada faixa de terra representa um ponto, e as pontes são ligações entre os pontos.



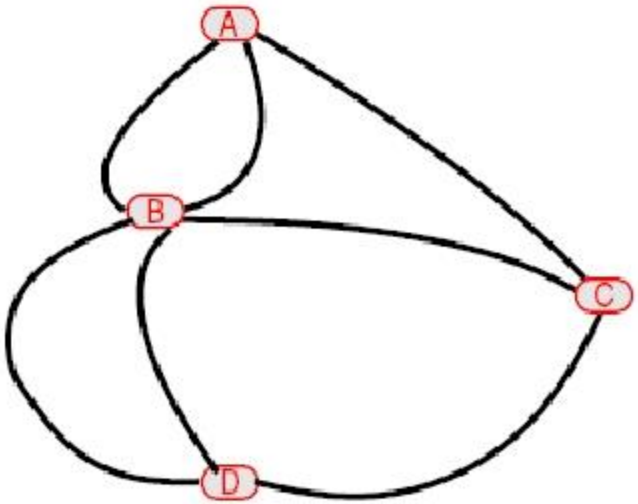
As Sete Pontes de Königsberg





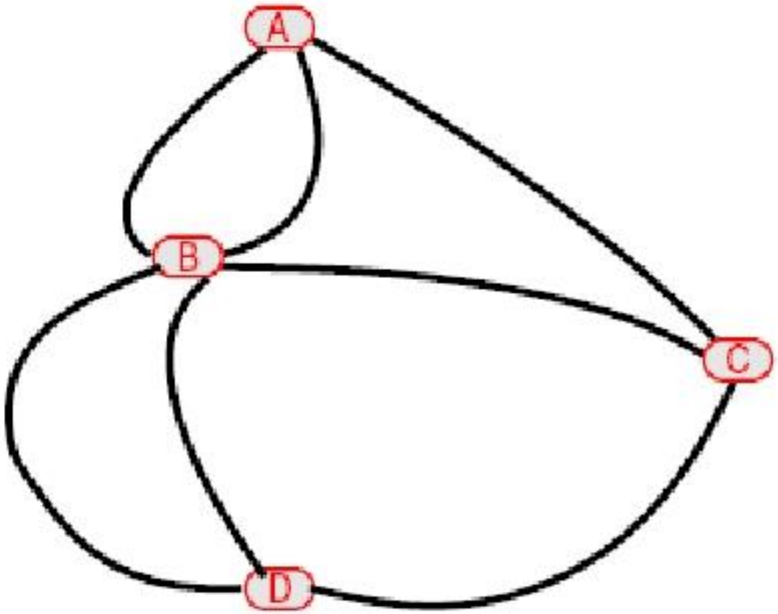
As Sete Pontes de Königsberg

- Obviamente, existem duas respostas possíveis para o dilema:
  - Ou Existe solução...
    - Basta mostrar uma!!! Fácil... ☺
    - Será mesmo simples??? Para todo problema...
  - Ou não existe solução
    - Pode se mostrar enumerando todos os caminhos possíveis, e mostrar que todos falham;
      - Árvore de possibilidades
    - ou de forma mais elegante, provando através das características do grafo que não existe solução para o problema



As Sete Pontes de Königsberg

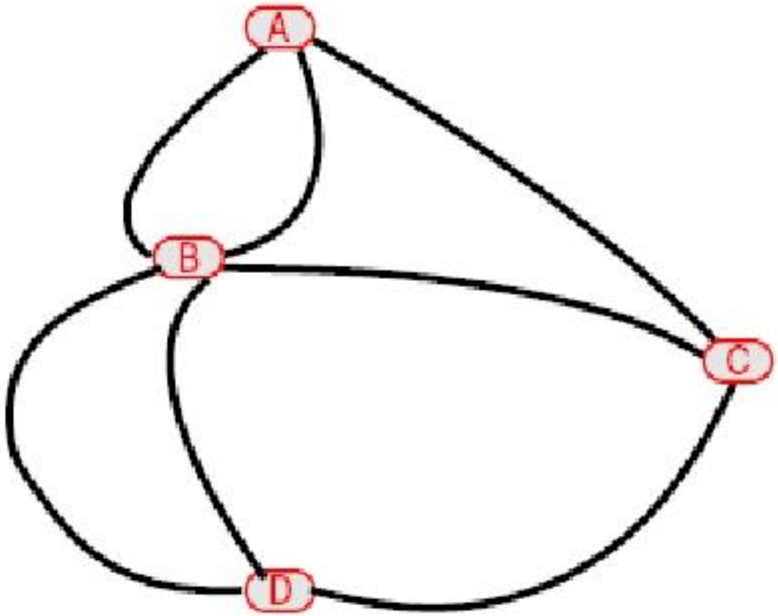
- Aparentemente não existe solução;
- Partindo do vértice A, e percorrendo outros vértices, podemos ver a utilização de no mínimo duas arestas (pontes) “chegada” e a de “saída”.
- Assim, se for possível achar uma rota que usa todas as arestas do grafo e começa e termina em A, então o número total de “chegadas” e “saídas” de cada vértice deve ser um valor múltiplo de 2.



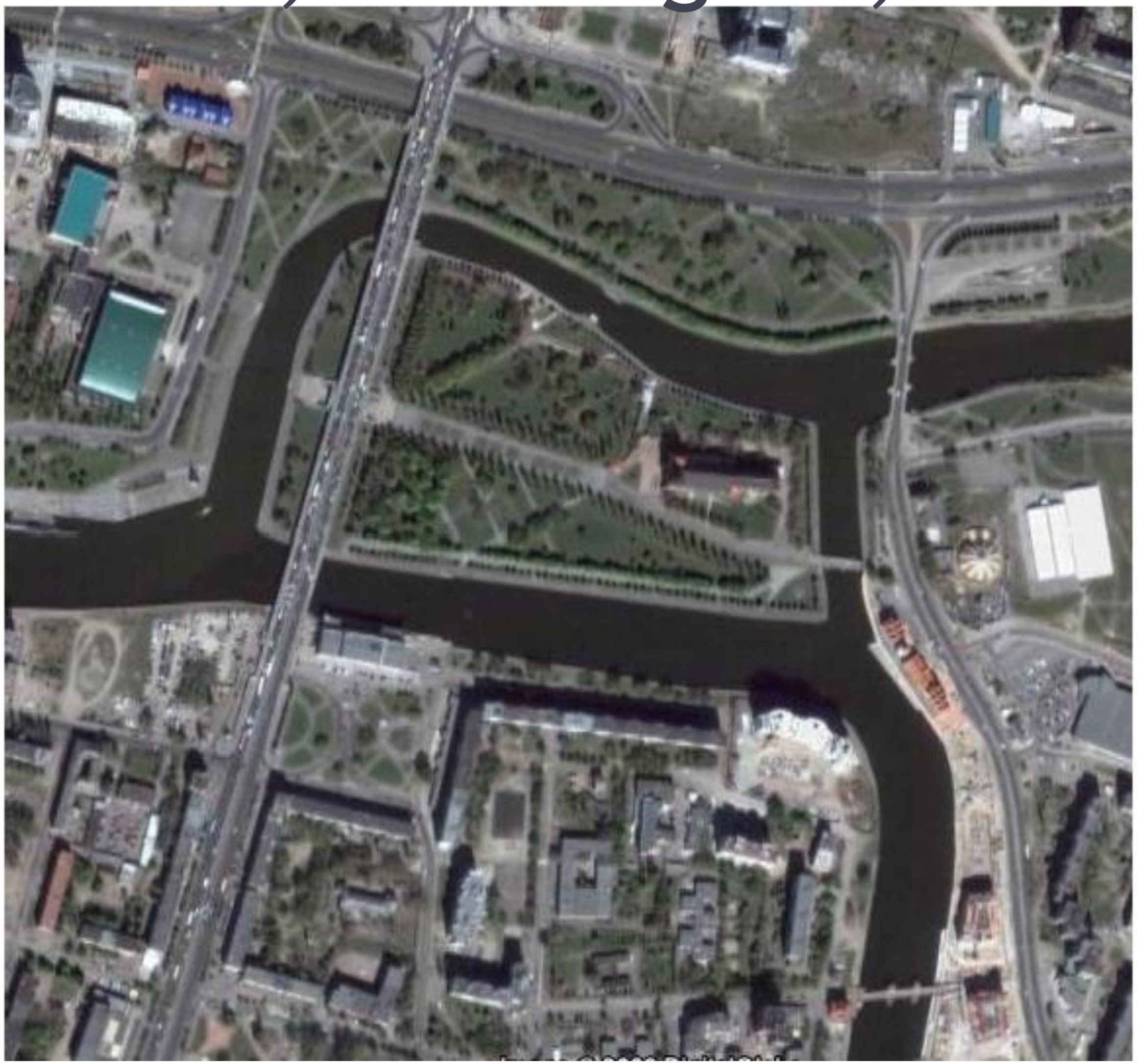
As Sete Pontes de Königsberg

- No entanto, temos:
  - grau(A) = grau(C) = grau(D) = 3;
  - grau(B) = 5.

- Assim, por este raciocínio <u>não é possível</u> percorrer as faixas de terra, passando por cada ponte uma única vez, retornando ao vértice de partida.



1736, Königsberg, Prússia
2007, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?

As Sete Pontes de Königsberg

- Verifique a beleza da solução de Euler...
- Mesmo para diferentes problemas, rapidamente verificamos que não existe tal ciclo...
  - Tal verificação pode ser efetuada em tempo polinomial, sem a necessidade de enumerar (implícita ou explicitamente todas as possibilidades)
- Quando existe tal ciclo, ele é classificado como ciclo Euleriano...

Leonhard Euler

curiosidades...

- Euler é atualmente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;

- Produziu mais de 1100 artigos e livros;

- Durante os últimos 17 anos de vida, ele ficou praticamente cego, quando produziu quase que metade de seus trabalhos.

Um pouco de história…

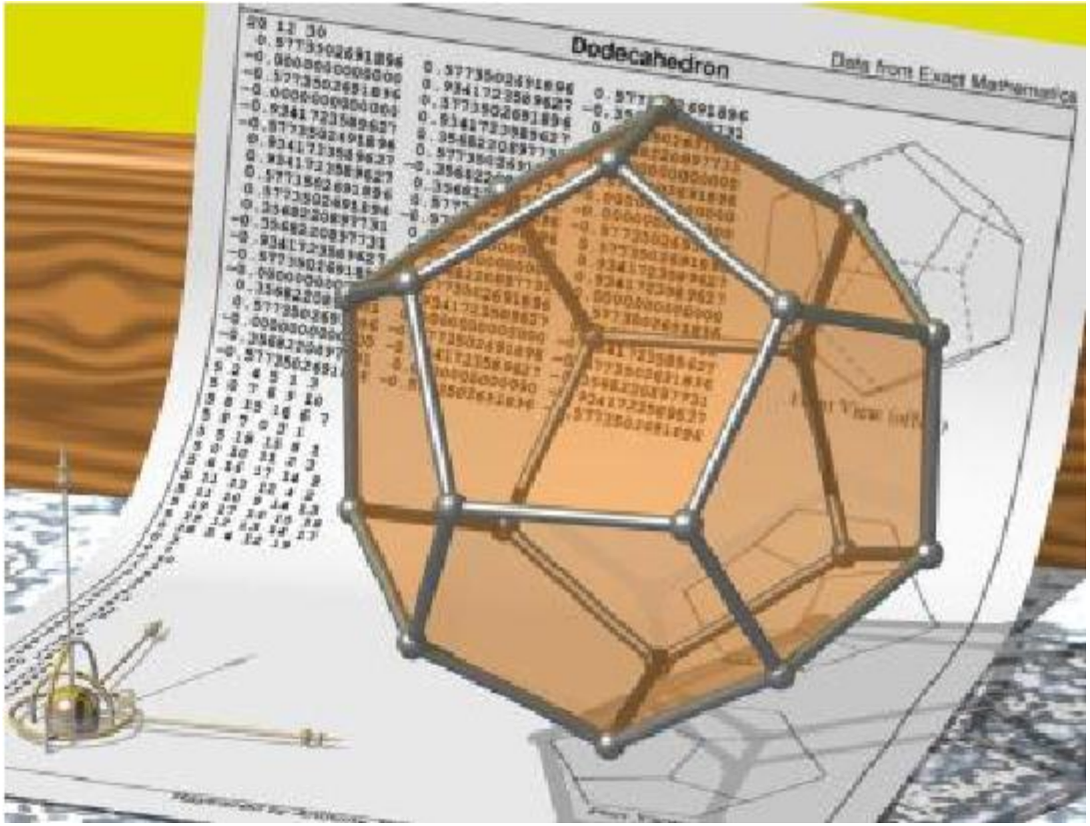
- Apesar da beleza da solução de Euler para o problema das sete pontes, a solução foi um detalhe na imensidão de contribuições do matemático;

- A resolução de um *toy problem*, e não aparentava a princípio ser de grande relevância para a ciência;

- Seu método de abstração ficou durante 150 anos oculto em meio ao seu mar de livros e artigos.

Um pouco de história…

- 1859 – Hamilton propôs um *toy problem*, a princípio sem aplicação prática. A busca por um circuito fechado em um dodecaedro regular;



Um pouco de história…

- Diferentemente do problema de Euler (que não se repete aresta, e pode se repetir vértices), o problema de Hamilton não permite a repetição de vértices, e conseqüentemente também não se repetem arestas;

- Atualmente, o ciclo Hamiltoniano é utilizado na definição formal do problema do Caixeiro Viajante (*um dos mais importantes e complexos problemas já descritos – definitivamente, o mais estudado problema de otimização combinatória*);

- É interessante observar que os problemas de Euler e Hamilton encontraram aplicações práticas 100 anos mais tarde, na área de Pesquisa Operacional;

Um pouco de história...
Aplicação do ciclo Hamiltoniano

- Imagine que você precisa construir uma placa de circuito impresso.
- Esta possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes.
- Suponha que você possui a disposição um braço eletrônico para perfurar a placa e precisa descrever um algoritmo para encontrar a ordem perfuração dos buracos;

Um pouco de história… Aplicação do ciclo Euleriano

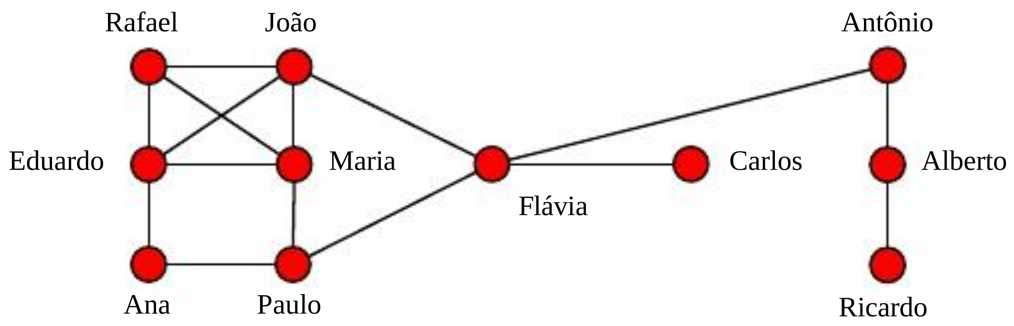
- Imagine que você precisa entregar encomendas em todas as ruas de uma região.

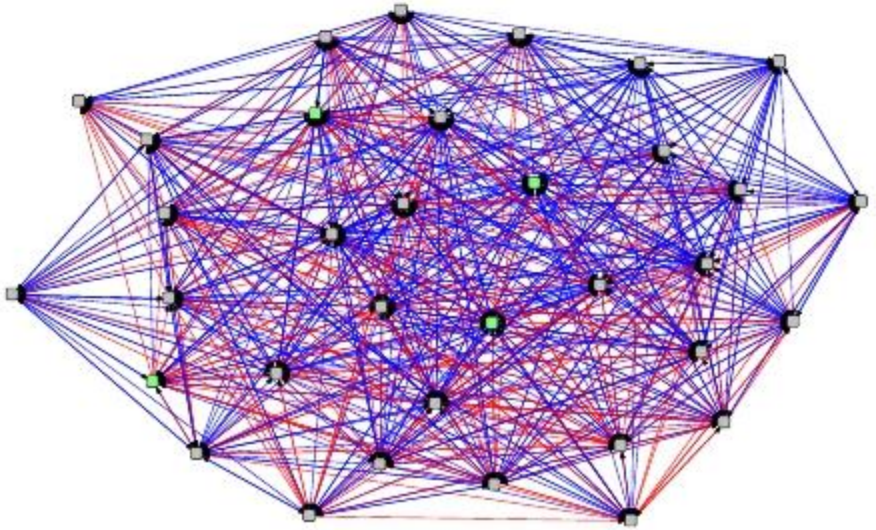
- Existe a possibilidade de encontrar uma rota sem repetir ruas inutilmente?
  - Minimizando assim o trajeto a ser percorrido..

Exemplos de Aplicações

Exemplo de Aplicação: Sociograma

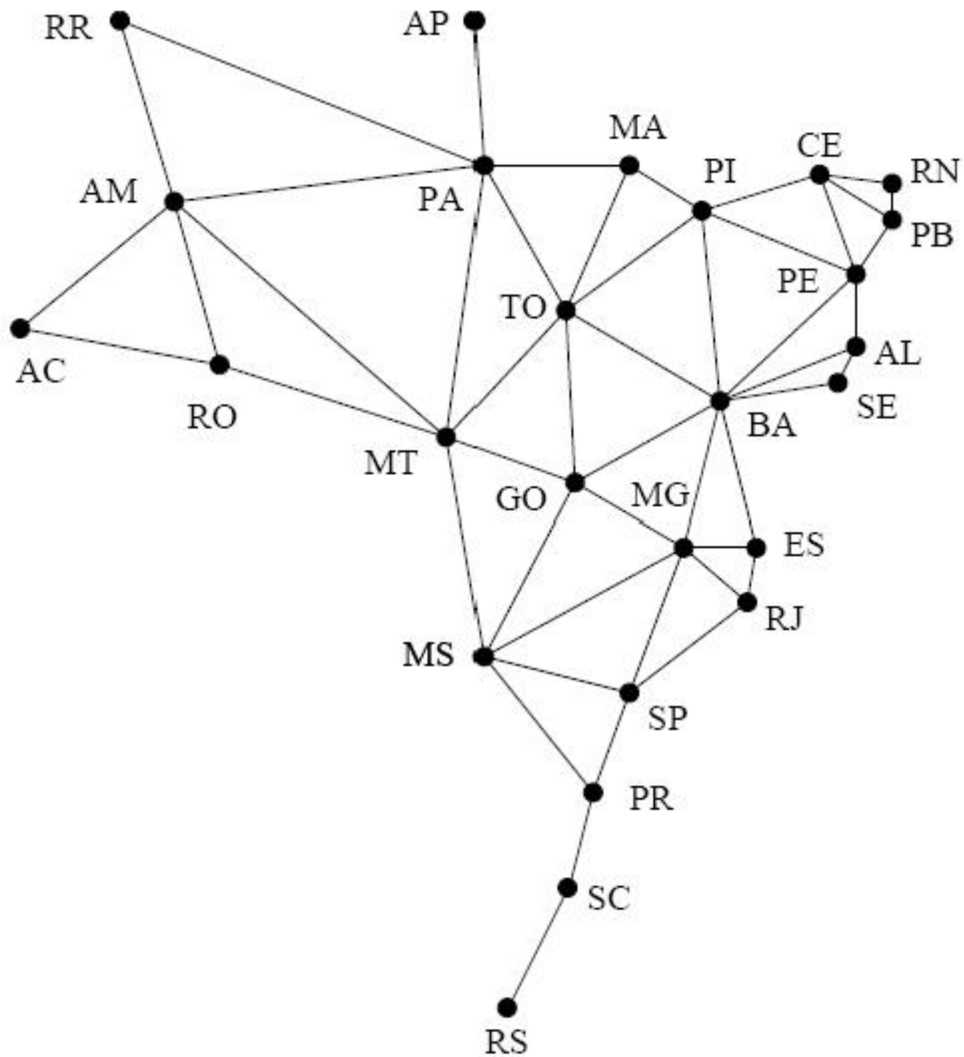
- Os sociogramas representam relacionamentos entre indivíduos;





Exemplo de aplicação:
Representação de Localidades

- A representação é base para inúmeras aplicações em grafos...

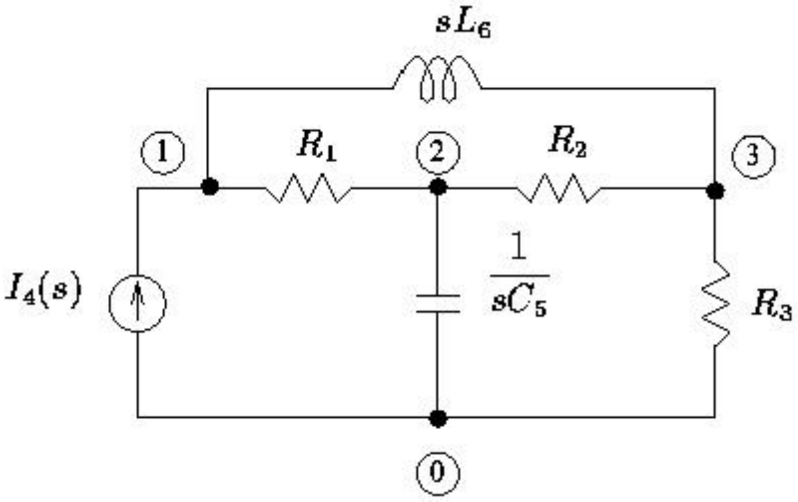


Exemplo de aplicação:

Caminho mínimo

- Exemplo:
  - Caminho mínimo entre BH e Alfenas calculado pelo *Google Maps*.
- O melhor algoritmo para este problema foi proposto por Dijkstra;
- O mesmo que propôs diversos algoritmos e estruturas na área de Sistemas Operacionais;

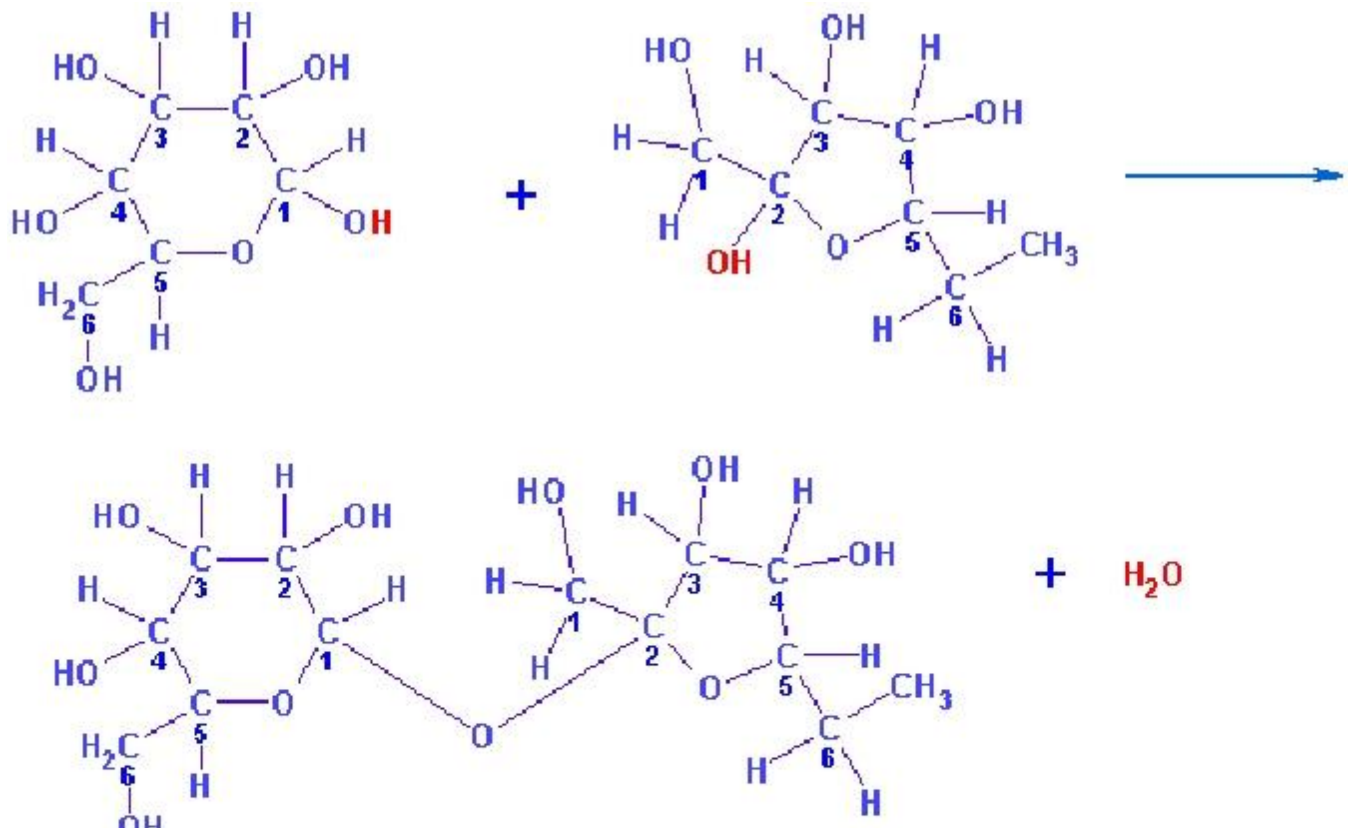
Exemplo de aplicação:
Circuitos elétricos



- Atualmente existem muitos problemas em aberto dedicados a prevenção de falhas no sistema elétrico de grandes metrópoles.

Exemplo de aplicação:
Química molecular

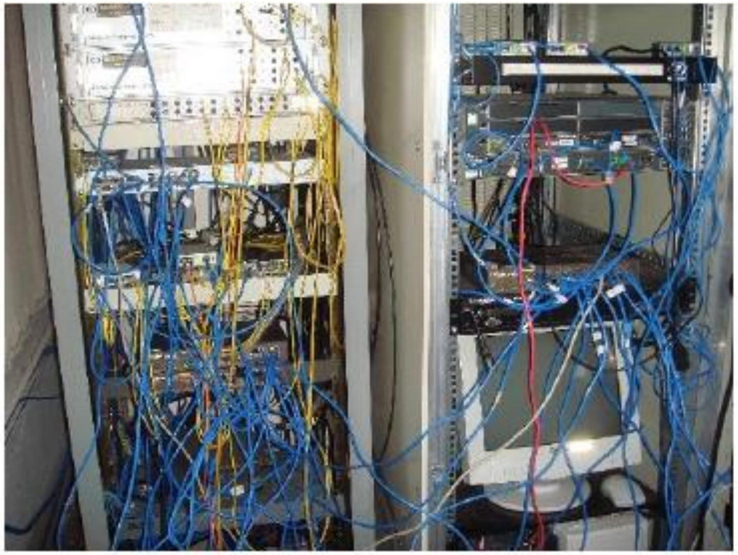
- Representação bidimensional de moléculas utilizando grafos...



molécula de sacarose

Exemplo de aplicação:
Redes de computadores

- Apesar das redes de computadores serem complexas no mundo real, onde inúmeros fatores descrevem o ambiente....



- É necessária uma forma de abstração para a eficiente comunicação dos computadores.

Exemplo de aplicação:
Redes de computadores

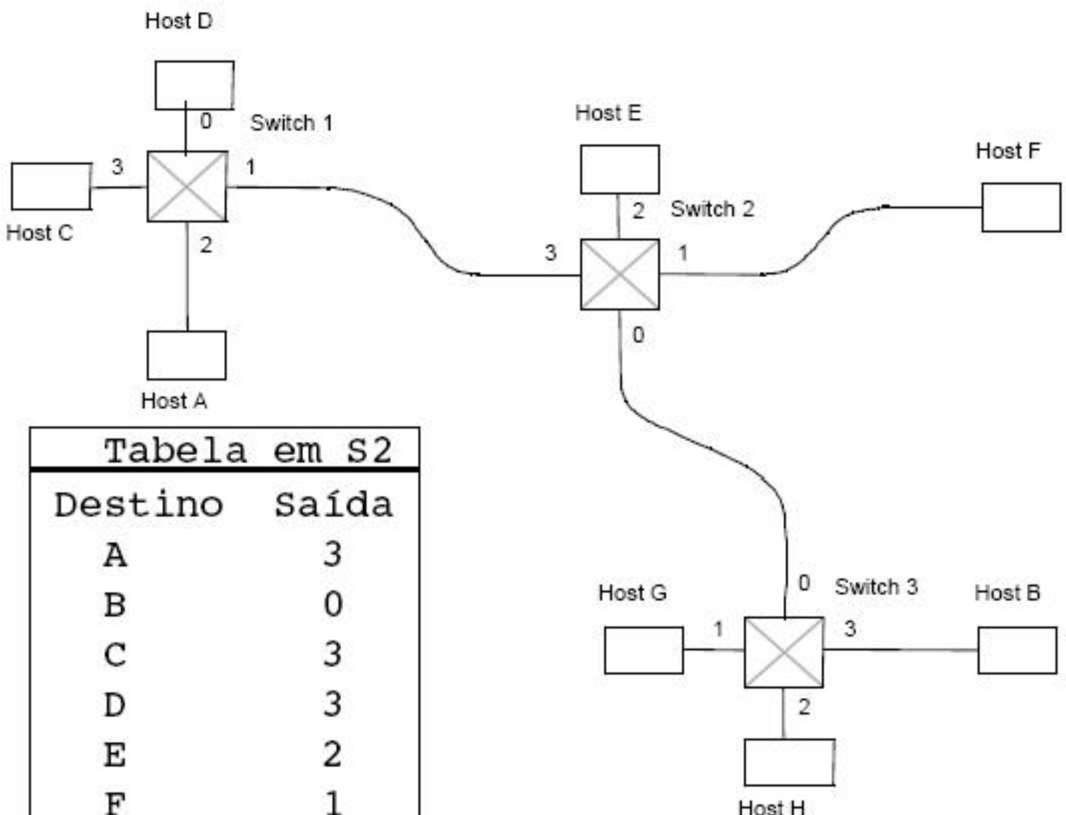
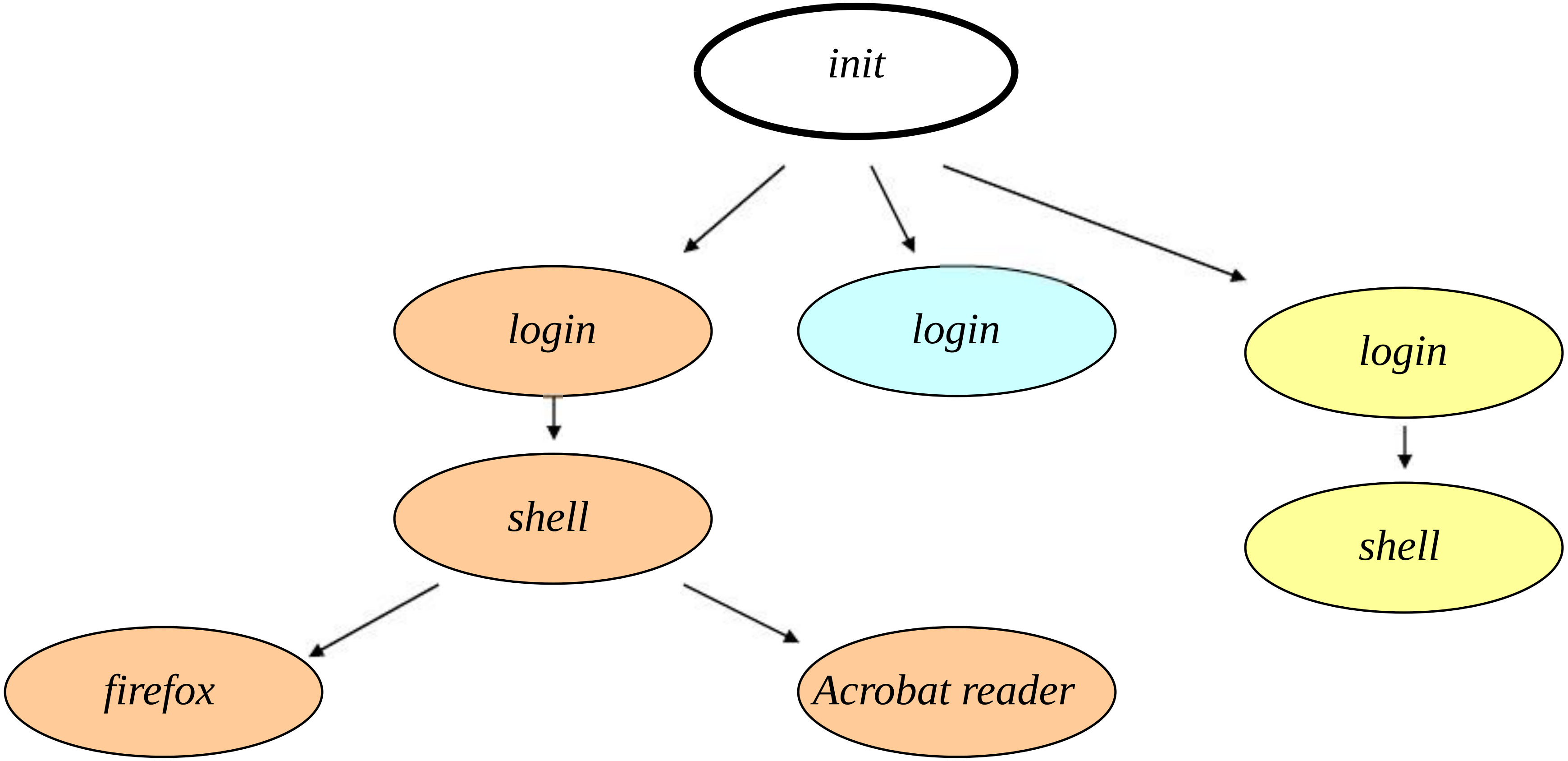


Tabela em S2	
Destino	Saída
A	3
B	0
C	3
D	3
E	2
F	1
G	0
H	0

- Que informações podemos utilizar para montar as tabelas de encaminhamento de cada *switch*?

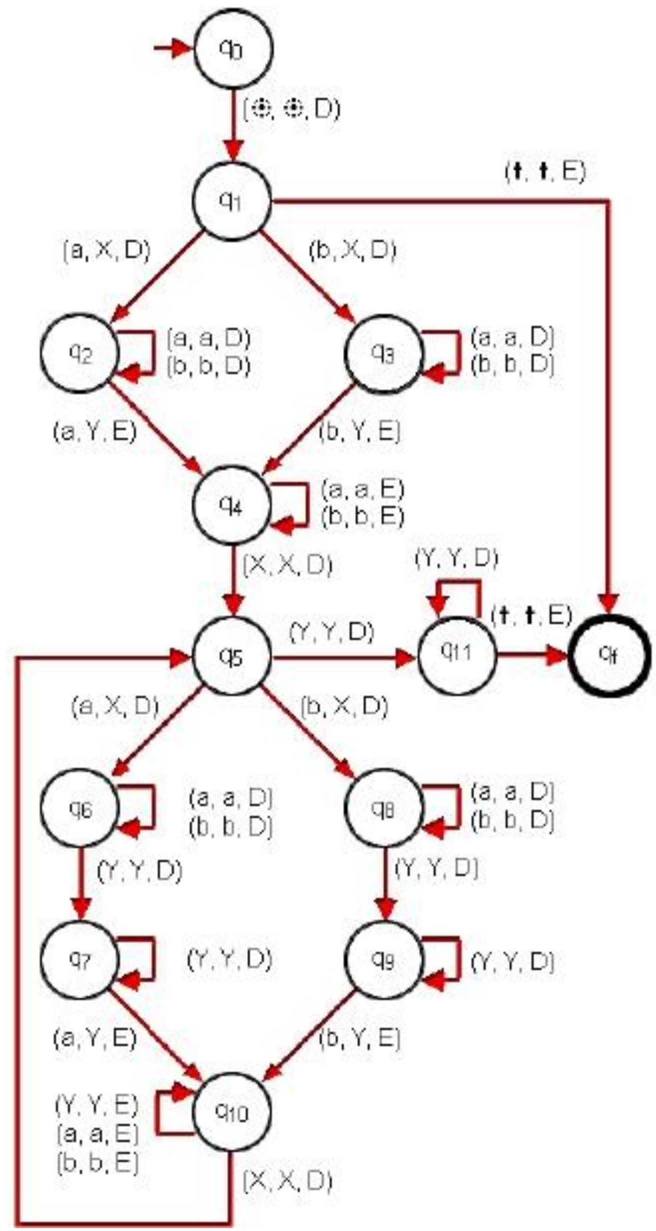
Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

- Hierarquia de Processos – Árvores são grafos especiais...

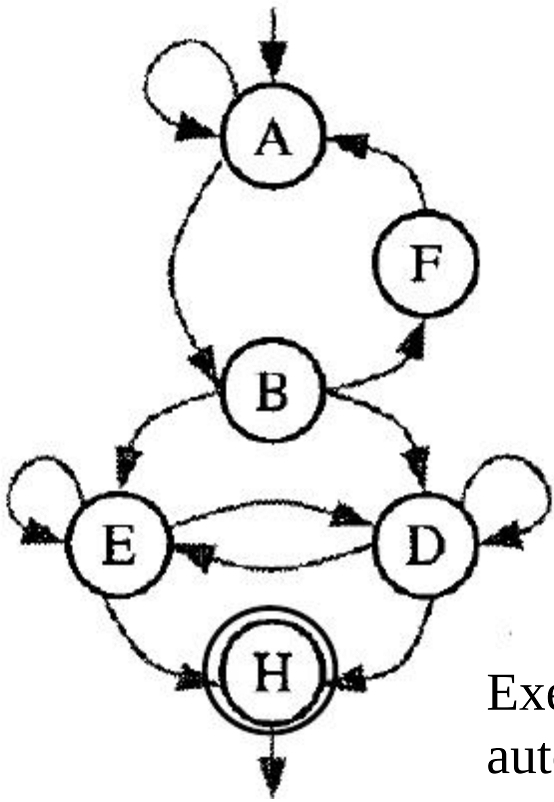


Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação

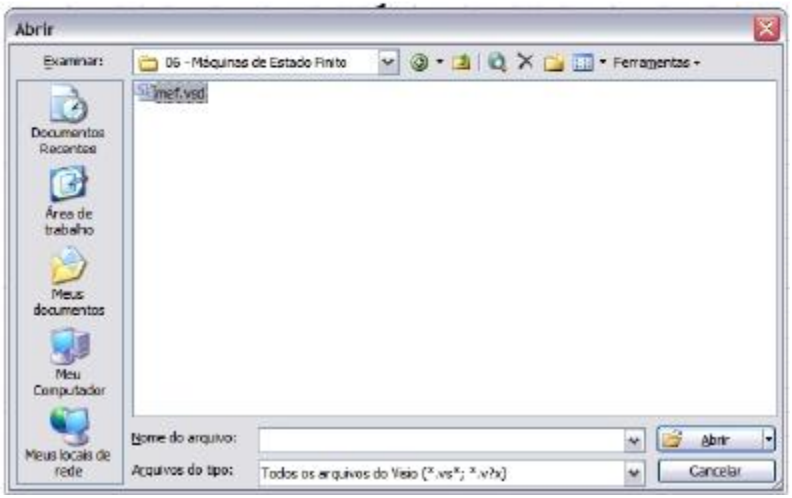
- Reconhecimento de textos de uma língua/linguagem qualquer.
    - Ex.: C++, Java, Português...
- Aplicação:
    - Detecção de erros sintáticos em frases de um documento por Máquinas de Turing ou Máquina equivalente.



Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação e Engenharia de Software
Caso: Abrir arquivo



A: File
B: Open
D: Name
E: Select
F: Cancel
H: Open



Exemplo de seqüências reconhecidas pelo autômato:

w1: AB, BE, EH (menor palavra da linguagem)

w2: AA, AA, AA, AB, BF, AB, BE, EH

Atualmente...

Grafos na atualidade

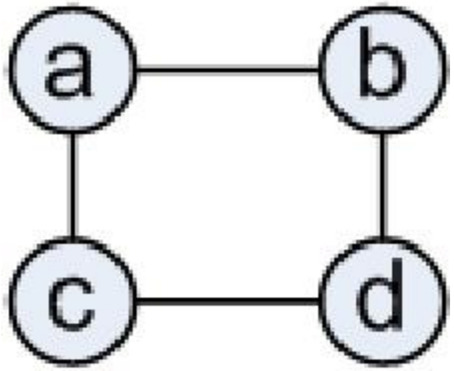
- Da "era Euler" até os dias atuais, a teoria dos grafos se desenvolveu rapidamente;
- Eu a considero uma teoria estável e de grande bagagem para resolução da maioria dos problemas práticos;
- Apesar da limitação computacional:
  - Seja ela de complexidade,
  - Seja ela de decidibilidade;

Conceitos Básicos

Grafos - Introdução

- Os grafos são formados por:
  - Vértices - conjunto *V*;
  - Arestas – conjunto *A*;

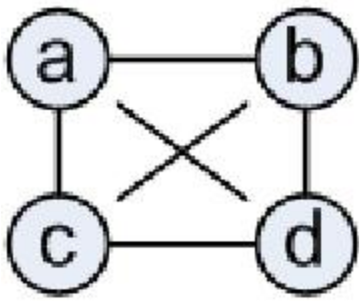
- Formalmente descrito como:
  - *G=(V,A)*



G_0

Grafos simples

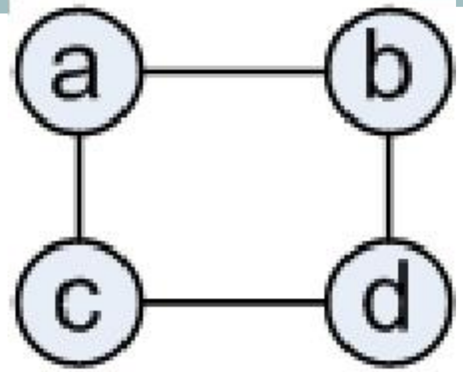
- Grafo simples:
  - Para qualquer conjunto V, denotamos por $V_{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V;
  - $V=\{a, b, c, d\}$
  - $V_{(2)} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$
  - Portanto, em um grafo simples: $A \subseteq V_{(2)}$



G_1

- "Um grafo é um par *(V,A)*, em que *V* é um conjunto arbitrário "*(finito)*", e *A* é um subconjunto de $V_{(2)}$."

Grafos simples



G_0

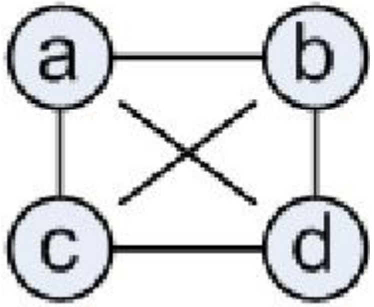
- Neste outro exemplo, o grafo simples G_0 é denotado por:
  - $G_0=(V,A)$, onde:
    - $V=\{a,b,c,d\}$
    - $A=\{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d)\}$
- *Repare que* <u>*A*</u> <u>é um subconjunto de</u> <u>$V_{(2)}$</u>;
- $V_{(2)} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$

Grafos simples

- Em um grafo simples, se a cardinalidade de V é igual a n, qual é a cardinalidade do conjunto $V_{(2)}$?

- $|V| = n$
- $|V_{(2)}| = ????$

- Lembrando que $V_{(2)}$ são os pares não ordenados de V.

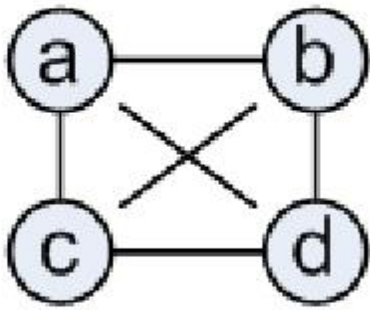


G_1

Grafos simples

- $|V| = n$
- $|V_{(2)}|$ = ????

- Lembrando que $V_{(2)}$ são os pares não ordenados de V.



G_1

$$\left|V^{(2)}\right| = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafos simples

- Por que isso é importante?
  - Memória pode ser um fator limitador dos sistemas computacionais...
  - É importante o sistema saber antes da operação, se o computador possui memória suficiente para executá-lo...
  - Pode ser crítico em aplicações que utilizam grandes mapas, por exemplo.

Grafo complementar de um grafo simples

- Considere o grafo $G = (V, A)$
- Seu complemento é denotado por

$$\overline{G} = (V, V_{(2)} \setminus A)$$

Grafos simples

- Uma aresta como ***{a,b}*** será denotada simplesmente por ***ab*** ou por ***ba***.

- Dizemos que a aresta ***ab*** incide em ***a*** e em ***b***.

- Dizemos que ***a*** e ***b*** são pontas da aresta;

- Se ***ab*** é uma aresta, vamos dizer que ***a*** e ***b*** são vértices vizinhos ou adjacentes.

Grafos simples

- De acordo com nossa definição, um grafo simples não pode:
  - Ter arestas paralelas;
  - Ter arestas do tipo "laço". Ex.: *bb, aa, hh, ...*

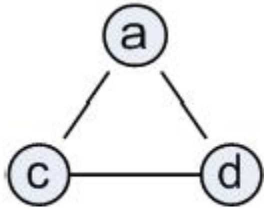
Grafos simples completo

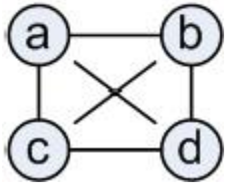
- Um grafo

$$G = (V, A)$$

- é completo se somente se

$$|A| = |V^{(2)}|$$

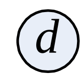




Grafos simples vazio

- Um grafo

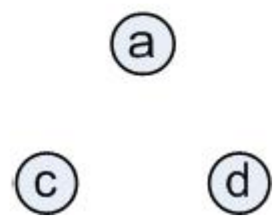
$$G = (V, A)$$

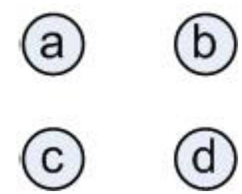


- é vazio se somente se

$$|A| = 0$$

$$A = \{\ \}$$





Grafos simples completo
Grafos simples vazio

- A expressão

$$G = K_n$$

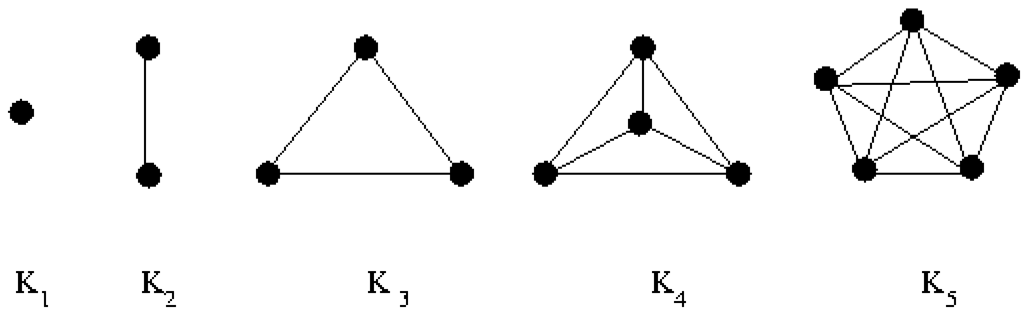
  - é uma abreviação para dizer que G é simples e completo e tem n vértices;

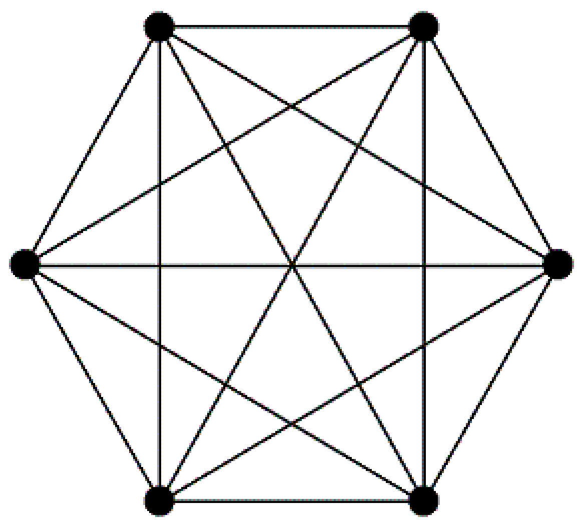
- E a expressão

$$G = \overline{K_n}$$

  - é uma abreviação para dizer que G é vazio e tem n vértices.

Grafos simples <u>completo</u>
Grafos simples <u>vazio</u>

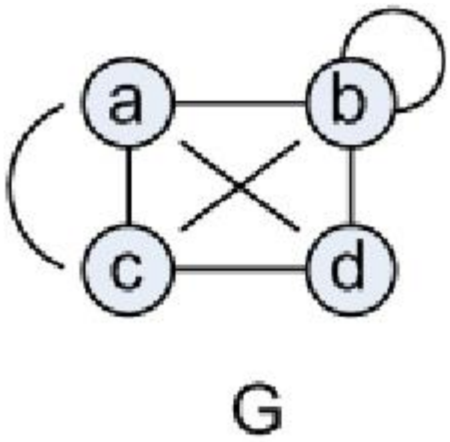




Grafos não orientados

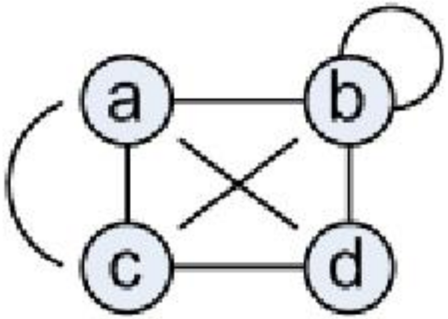
Grafos não orientados

- Estrutura bem parecida com os grafos simples;
- A diferença é que pode possuir arestas paralelas e também arestas "laço";



Grafos não orientados

- Aplicações:
  - Em alguns casos, como fluxo em redes, por exemplo, existem dois caminhos que o objeto em questão pode passar entre dois vértices;
  - Exemplo:
    - Uma rede de computadores que possui dois canais de envio de informação;

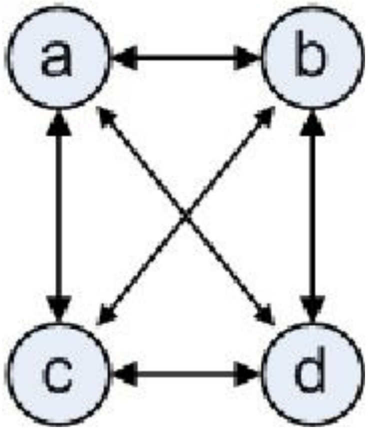


G

Grafos orientados simples

Grafos orientados

- Grafo orientado:
  - Para qualquer conjunto *V*, denotamos por V^2 o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de *V*;
  - $V=\{a, b, c, d\}$
  - $V^2 = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$
  - Portanto: $A \subseteq V^2$

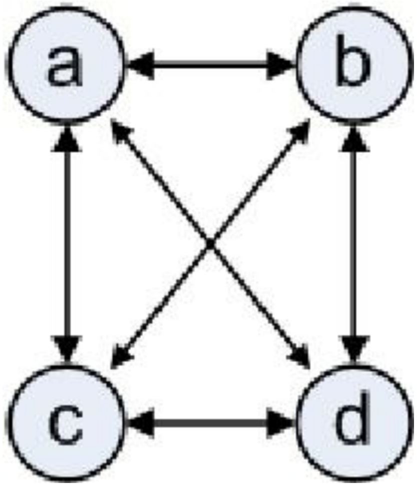


Grafos orientados

- Em um grafo orientado, se a cardinalidade de V é igual a n, qual é a cardinalidade do conjunto V^2?

- $|V| = n$
- $|V^2| = ????$

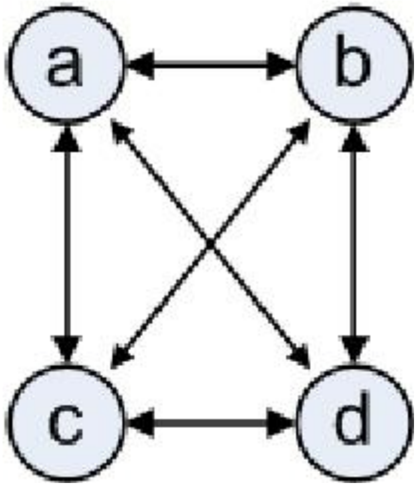
- Lembrando que V^2 são os pares ordenados de V.



Grafos orientados

- $|V| = n$
- $|V_2| = ????$

- Lembrando que V_2 são os pares ordenados de V.

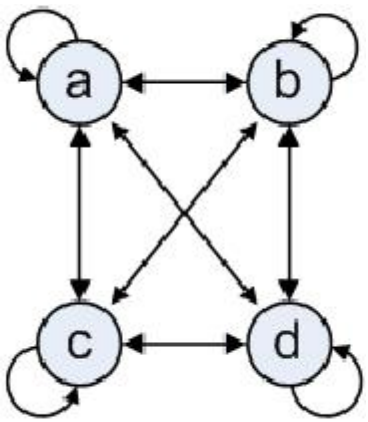


$$|V^2| = \sum_{i=1}^{n} (n-1) = n(n-1)$$

$$= n^2 - n$$

Grafos orientados com aresta “laço”

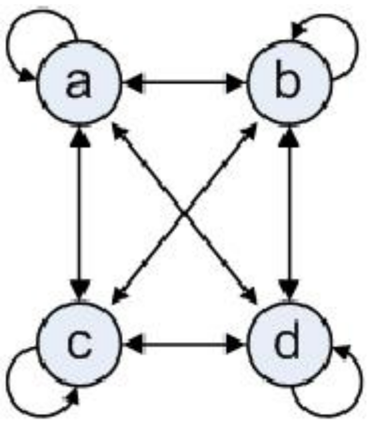
- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,



- O número máximo de aresta é???

Grafos orientados com aresta "laço"

- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,



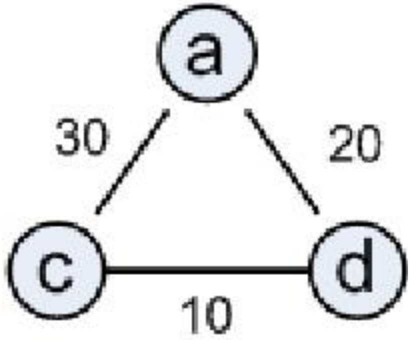
$$\sum_{i=1}^{n}(n) = n(n)$$

$$= n^2$$

Grafos Valorados

Grafos valorados

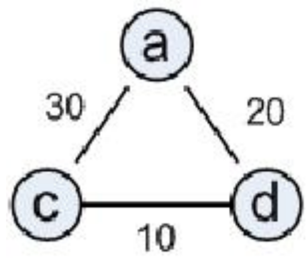
- São utilizados rótulos também nas arestas;



- Grafos valorados podem ser orientados e não orientados;

Grafos valorados

- Geralmente utilizamos rótulos em arestas para representar o custo de alguma coisa:
  - Por exemplo, a distância para sair da cidade *a* e chegar na cidade *b*.
  - Ou o tempo necessário...
  - Em Redes de Computadores, a aresta muitas vezes recebe o RTT (*round-trip time*), tempo de ida e volta...



Algoritmos em Grafos

Representação Computacional

Representação

E se quisermos armazenar um grafo em um computador?

Precisamos armazenar os dados essenciais da definição de grafo;

A partir desta informação podemos, por exemplo:

- Construir uma representação visual ou efetuar operações sobre o grafo;
- Aplicar algoritmos para otimizar determinadas tarefas;
- Determinar se alguma tarefa é possível de ser realizada.

Representação

Diversas são as formas de representar tal estrutura computacionalmente;;

Estruturas comumente utilizadas:

- Matriz de Adjacência;;
- Matriz de Incidência;;
- Lista de Adjacência.

Matriz de Adjacência

Representação

Matriz de adjacência

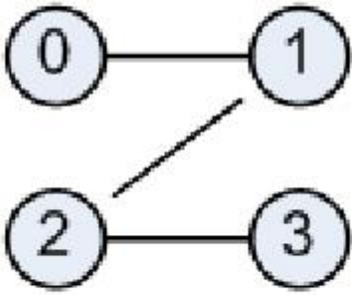
Lembrando o conceito de adjacência:

a é adjacente a *b* se *a* está conectado a *b*;

A matriz de adjacência possui a informação que reflete este conceito:

Suponha a matriz quadrada M

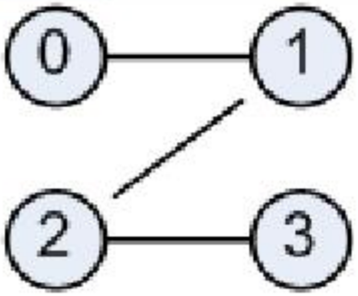
$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \textit{ se i é adjacente a j} \\ 0, \textit{ em caso contrário} \end{cases}$$



G

Representação

Matriz de adjacência



G

$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \textit{ se i é adjacente a j} \\ 0, \textit{ em caso contrário} \end{cases}$$

	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0

Representação
Matriz de adjacência

Em um grafo K_4, como seria a matriz de adjacência?

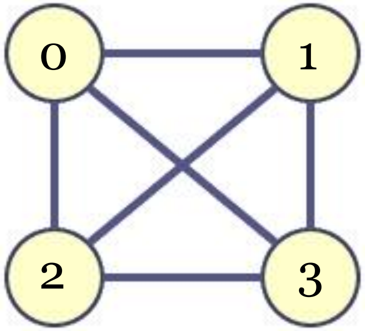
E em um grafo complemento de K_4?

Representação
Matriz de adjacência

$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \; se \; i \; é \; adjacente \; a \; j \\ 0, \; em \; caso \; contrário \end{cases}$$

Em um grafo K_4, como seria a matriz de adjacência?

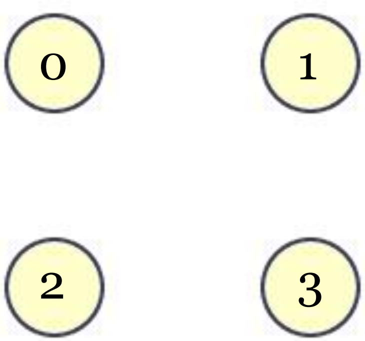
	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	1	1	1	0



Representação
Matriz de adjacência

$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \; se \; i \; é \; adjacente \; a \; j \\ 0, \; em \; caso \; contrário \end{cases}$$

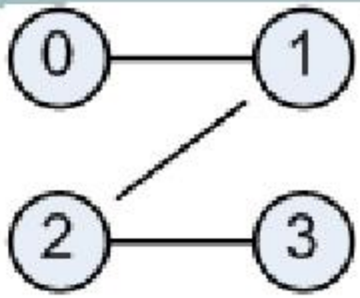
E em um grafo complemento de K_4?



	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

Representação

Matriz de adjacência



G

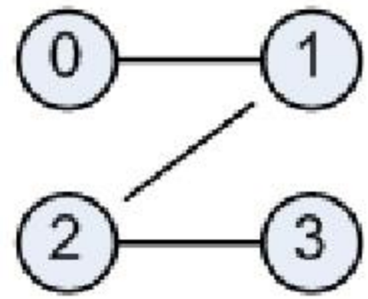
	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0

Vantagem????

Desvantagem???

Representação
Matriz de adjacência

Acesso: (1)



G

Desvantagens???

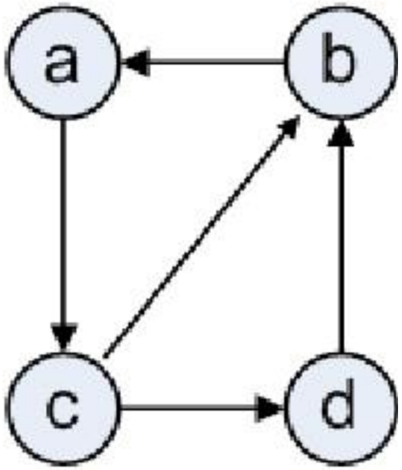
Memória: $(|V|^2)$

	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0

Representação

Matriz de adjacência

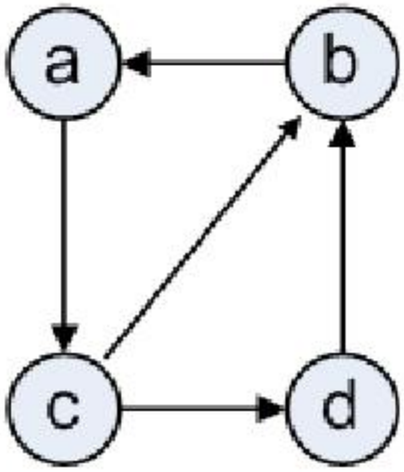
É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência???



G_C

Representação
Matriz de adjacência

É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência???



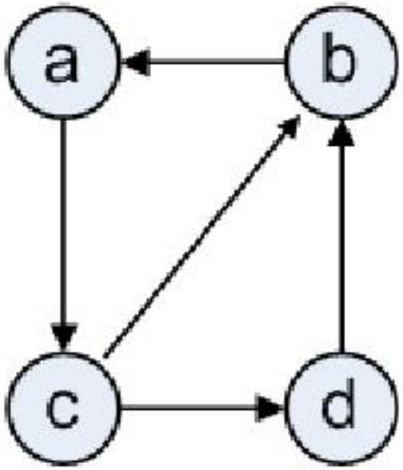
G_C

Uma forma...

	a	b	c	d
a	0	+1	-1	0
b	-1	0	+1	+1
c	+1	-1	0	-1
d	0	-1	+1	0

Representação
Matriz de adjacência

É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência???



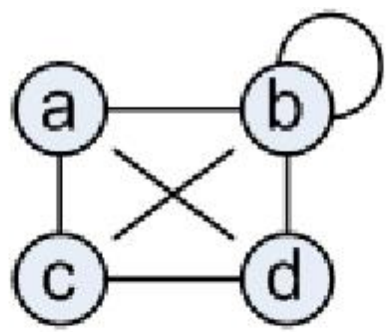
G_C

Outra forma...

	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	1	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	1	0	0

Representação
Matriz de adjacência

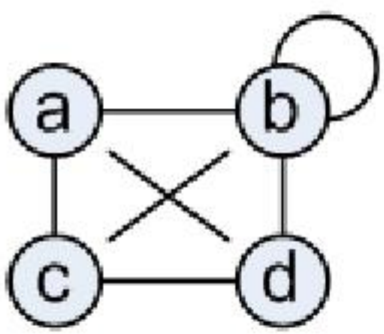
É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de adjacência?



G

Representação
Matriz de adjacência

É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de adjacência?



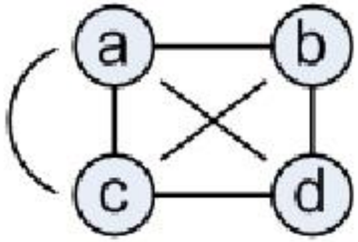
G

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	0	1
d	1	1	1	0

Representação

Matriz de adjacência

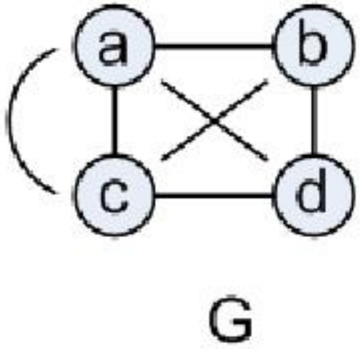
É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência?



G

Representação
Matriz de adjacência

É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência?

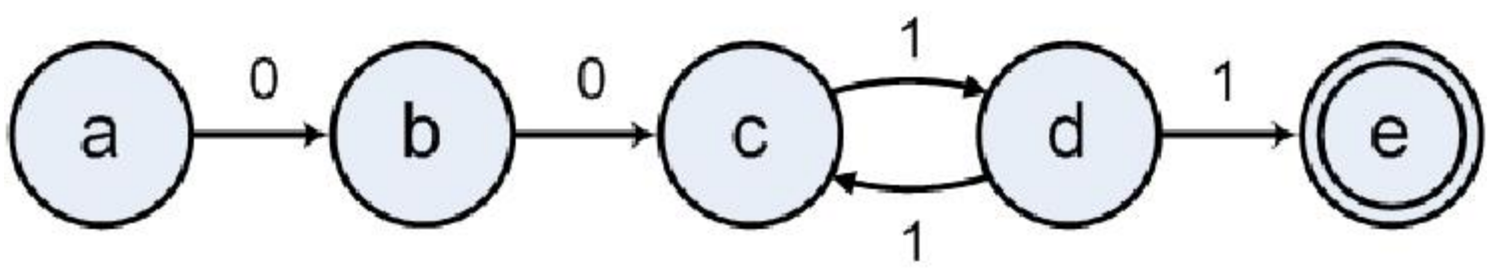


	a	b	c	d
a	0	1	2	1
b	1	0	1	1
c	2	1	0	1
d	1	1	1	0

Representação

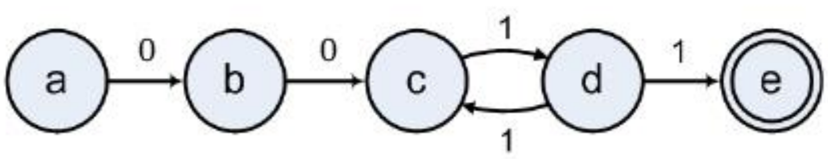
Matriz de adjacência

É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de adjacência?



Representação
Matriz de adjacência

É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de adjacência?

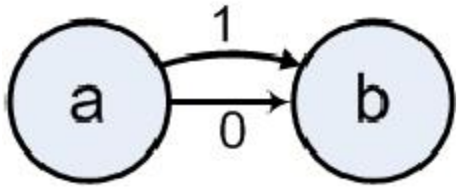


	a	b	c	d	e
a		0			
b			0		
c				1	
d			1		1
e					

Representação

Matriz de adjacência

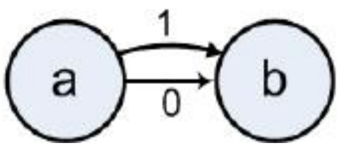
É possível representar grafos com arestas valoradas e com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência?



Representação

Matriz de adjacência

É possível representar grafos com arestas valoradas e com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência?



	a	b
a	0	-2
b	+2	0

Não é possível sem utilizar estruturas auxiliares.

Matriz de Incidência

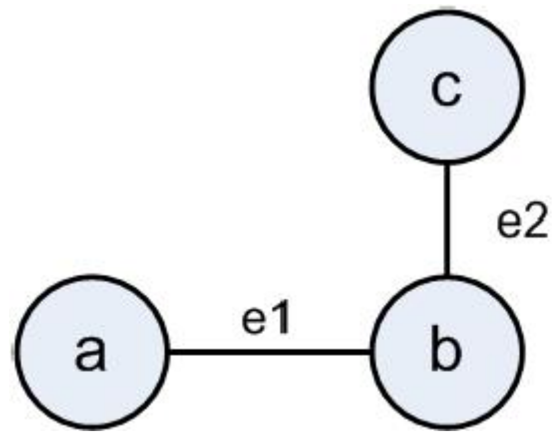
Representação

Matriz de Incidência

A matriz de incidência possui a seguinte dimensão:

$$|V| X |A|$$

Suponha a matriz $M_{\backslash V \backslash x \backslash A \backslash}$



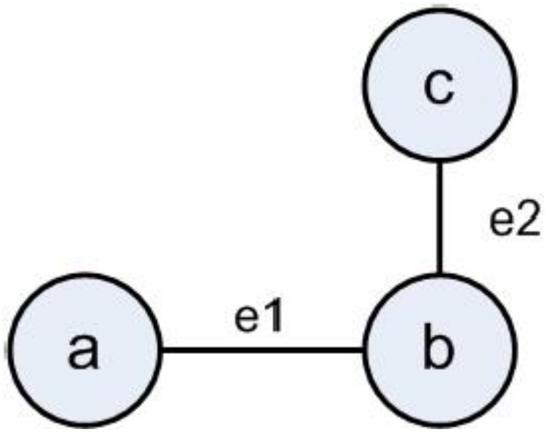
$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \; se\ a\ aresta\ \ j\ incide\ no\ v\acute{e}rtice\ i \\ 0, \; em\ caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Representação

Matriz de Incidência

$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \; se\ a\ aresta\ \ j\ incide\ no\ vértice\ i \\ 0, \; em\ caso\ contrário \end{cases}$$

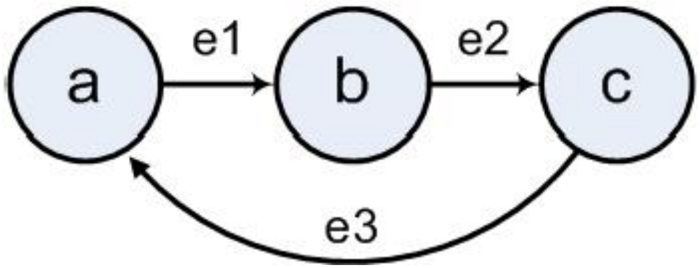
	e1	e2
a	1	0
b	1	1
c	0	1



Representação

Matriz de Incidência

Podemos representar grafos orientados utilizando matriz de incidência???

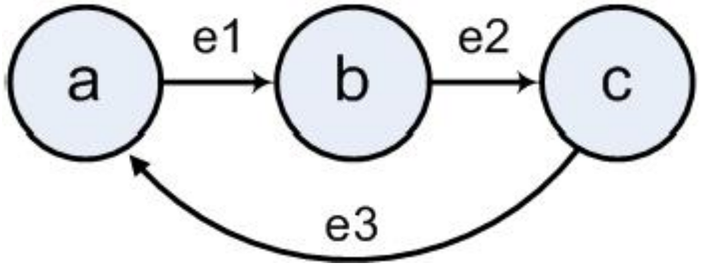


Representação

Matriz de Incidência

$$m_{i,j} \begin{cases} 1, \textit{ se a aresta } j \textit{ tem como origem o vértice } i \\ -1, \textit{ se a aresta } j \textit{ tem como destino o vértice } i \\ 0, \textit{ em caso contrário} \end{cases}$$

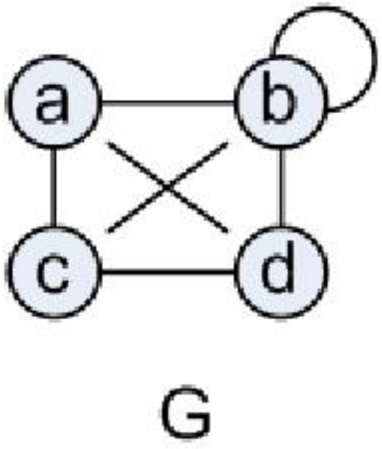
	e1	e2	e3
a	-1	0	+1
b	+1	-1	0
c	0	+1	-1



Representação

Matriz de Incidência

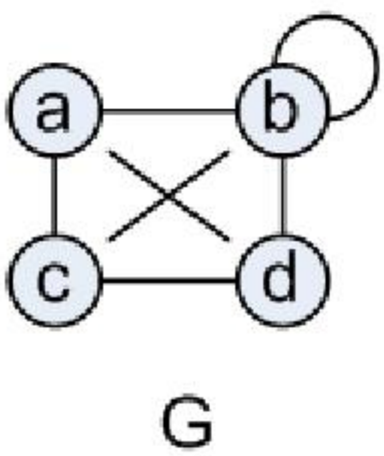
É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de incidência?



Representação

Matriz de Incidência

É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de incidência?

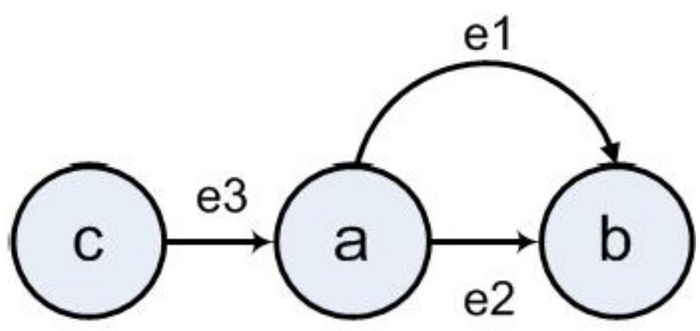


	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
a	1	1	1	0	0	0	0
b	1	0	0	1	1	0	2
c	0	1	0	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1	1	0

Representação

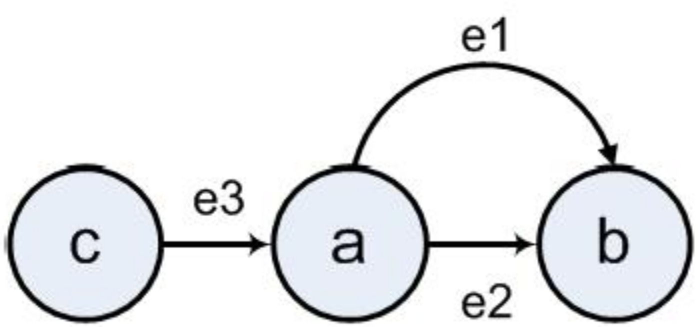
Matriz de Incidência

É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de incidência?



Representação
Matriz de Incidência

É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de incidência?



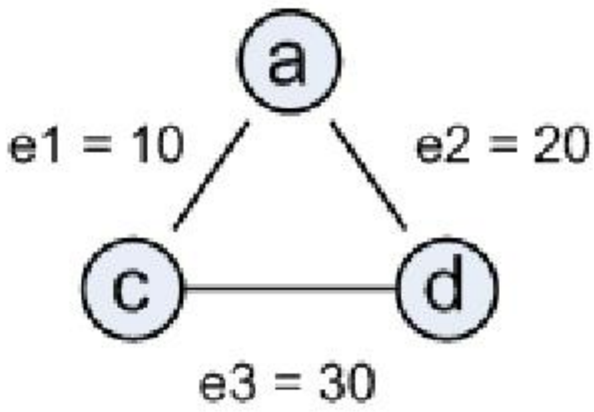
Mesma representação para arestas distintas

	e1	e2	e3
a	-1	-1	+1
b	+1	+1	0
c	0	0	-1

Representação

Matriz de Incidência

É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de incidência?



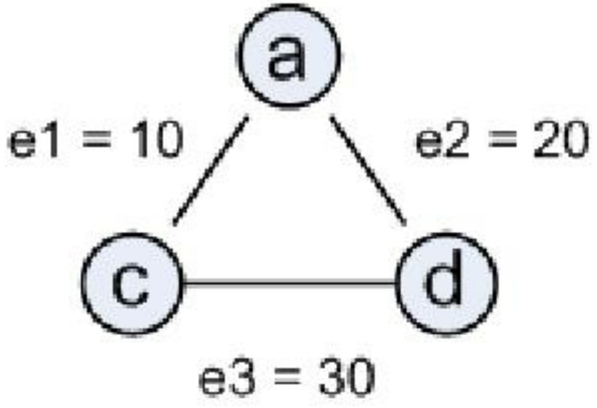
Representação

Matriz de Incidência

É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de incidência?

$$m_{i,j} \begin{cases} c_j, \textit{ se a aresta } j \textit{ incide no vértice } i \\ \text{infinito}, \textit{ em caso contrário} \end{cases}$$

	e1	E2	e3
a	10	20	
c	10		30
d		20	30

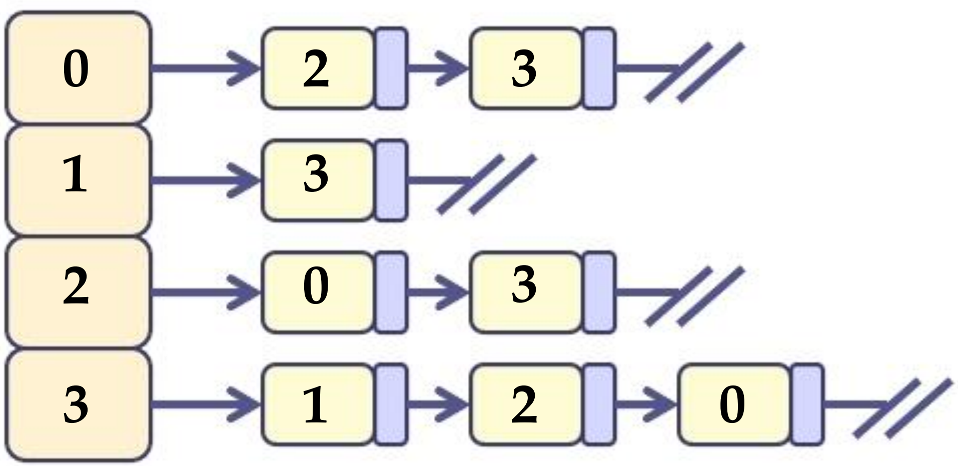


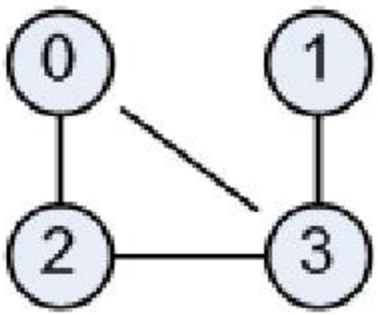
Lista de Adjacência

Representação
Lista de Adjacência

Estrutura de dados:

- Vetor de listas;



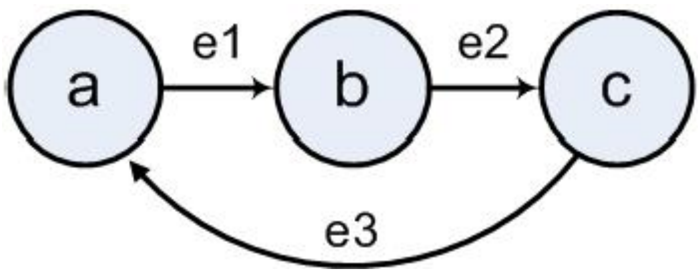


G

Representação

Lista de Adjacência

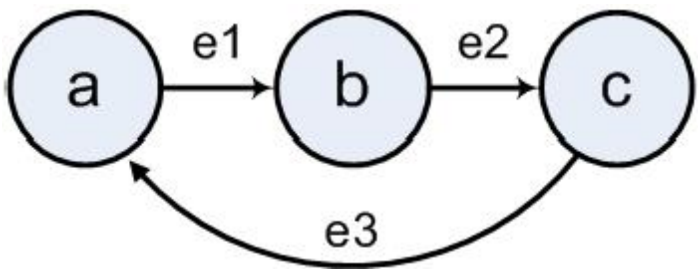
Podemos representar grafos orientados utilizando lista de adjacência?

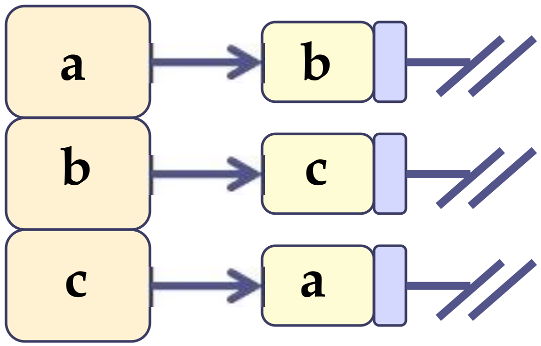


Representação

Lista de Adjacência

Podemos representar grafos orientados utilizando lista de adjacência?

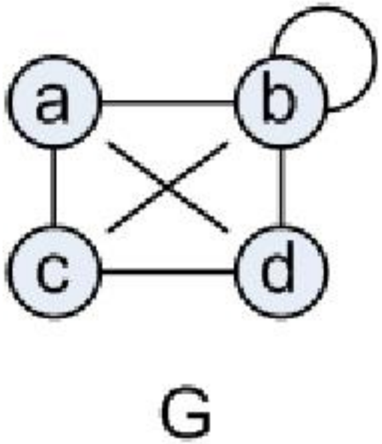




Representação

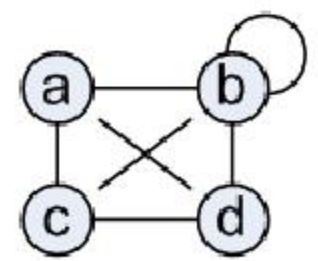
Lista de Adjacência

É possível representar grafos com arestas laço utilizando lista de adjacência?

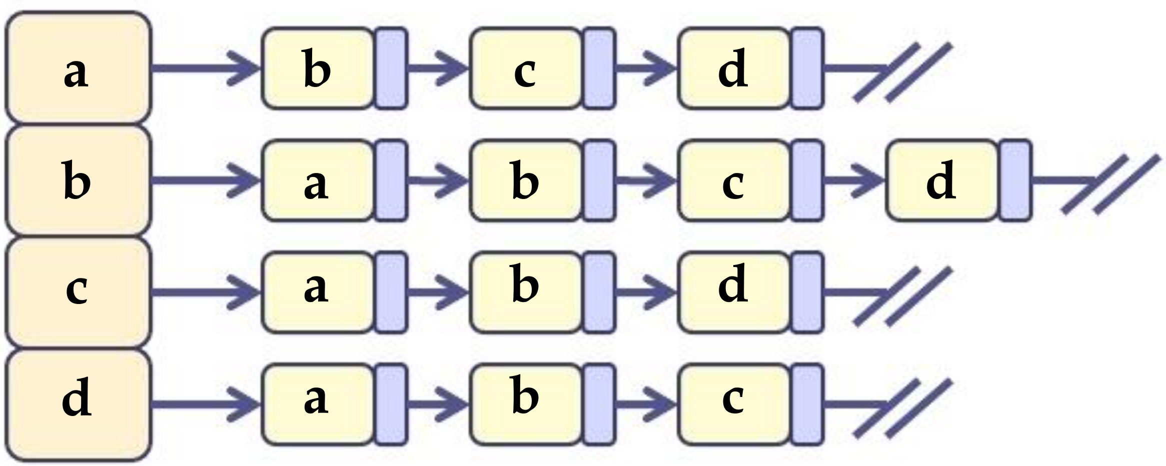


Representação
Lista de Adjacência

É possível representar grafos com arestas laço utilizando lista de adjacência?

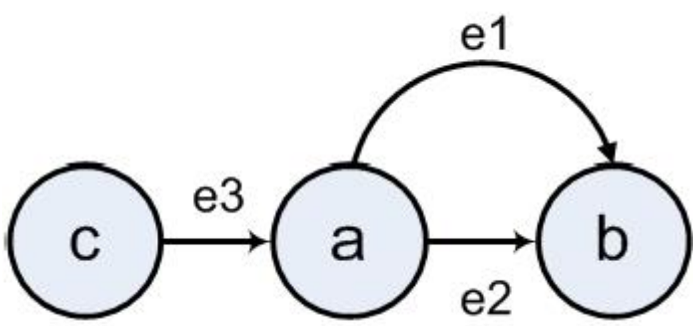


G



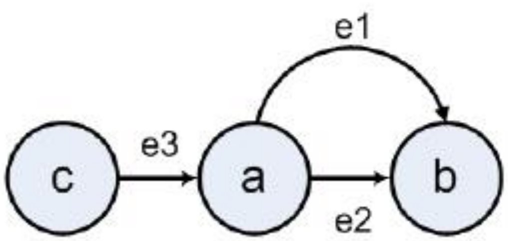
Representação
Lista de Adjacência

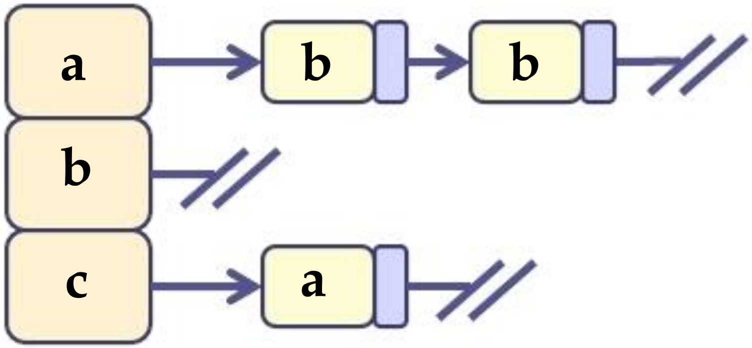
É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando lista de adjacência?



Representação
Lista de Adjacência

É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando lista de adjacência?

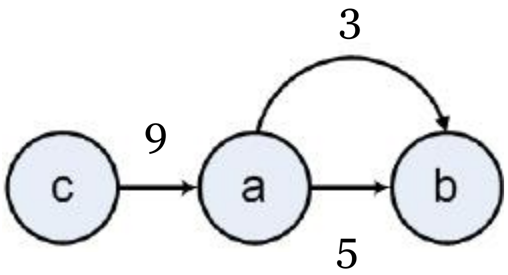




Representação

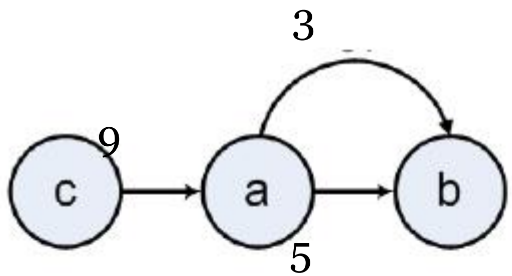
Lista de Adjacência

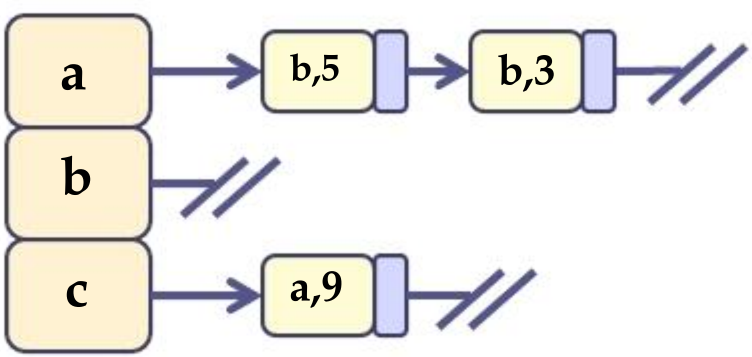
É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando lista de adjacência?



Representação
Lista de Adjacência

É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando lista de adjacência?



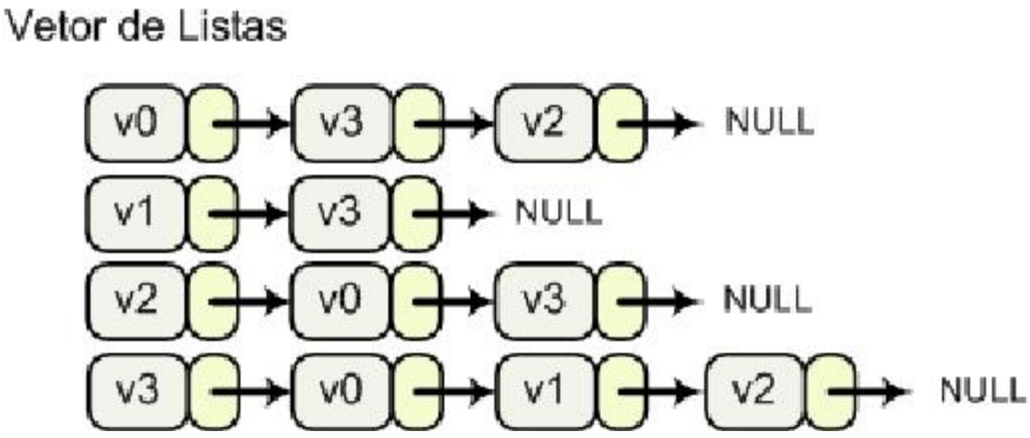


Representação

Lista de Adjacência

Vantagem?

Desvantagem?



Representação

Lista de Adjacência

Vantagem?

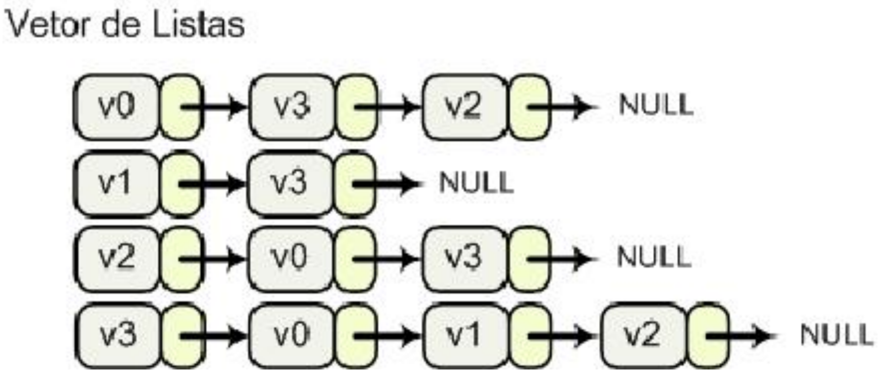
Memória:

$$(|V| + |A|)$$

Desvantagem

Acesso:

$$(|A|)$$



Algoritmos em Grafos

Dúvidas?